Основы криптографии

Артур Хашаев

arthur@khashaev.ru

МГУ им. М.В. Ломоносова
Лаборатория интеллектуальных систем кибербезопасности

Содержание

Свойства безопасности

- Конфиденциальность
- Целостность
- Подлинность
- Неотказуемость от авторства, …

Криптографические примитивы

Без ключа

- **Односторонняя функция**
  - Хэш-функция
- Генератор случайных последовательностей

На основе секретных значений

- Шифрование
- Код аутентификации
- Цифровая подпись
- Функция формирования ключа
- Генератор псевдослучайных последовательностей

Криптографические протоколы

- Протокол — алгоритм решения некоторой задачи $n \geqslant 2$ сторонами
- Криптографический протокол — протокол, в котором используются криптографические примитивы

Принцип Керккхоффса

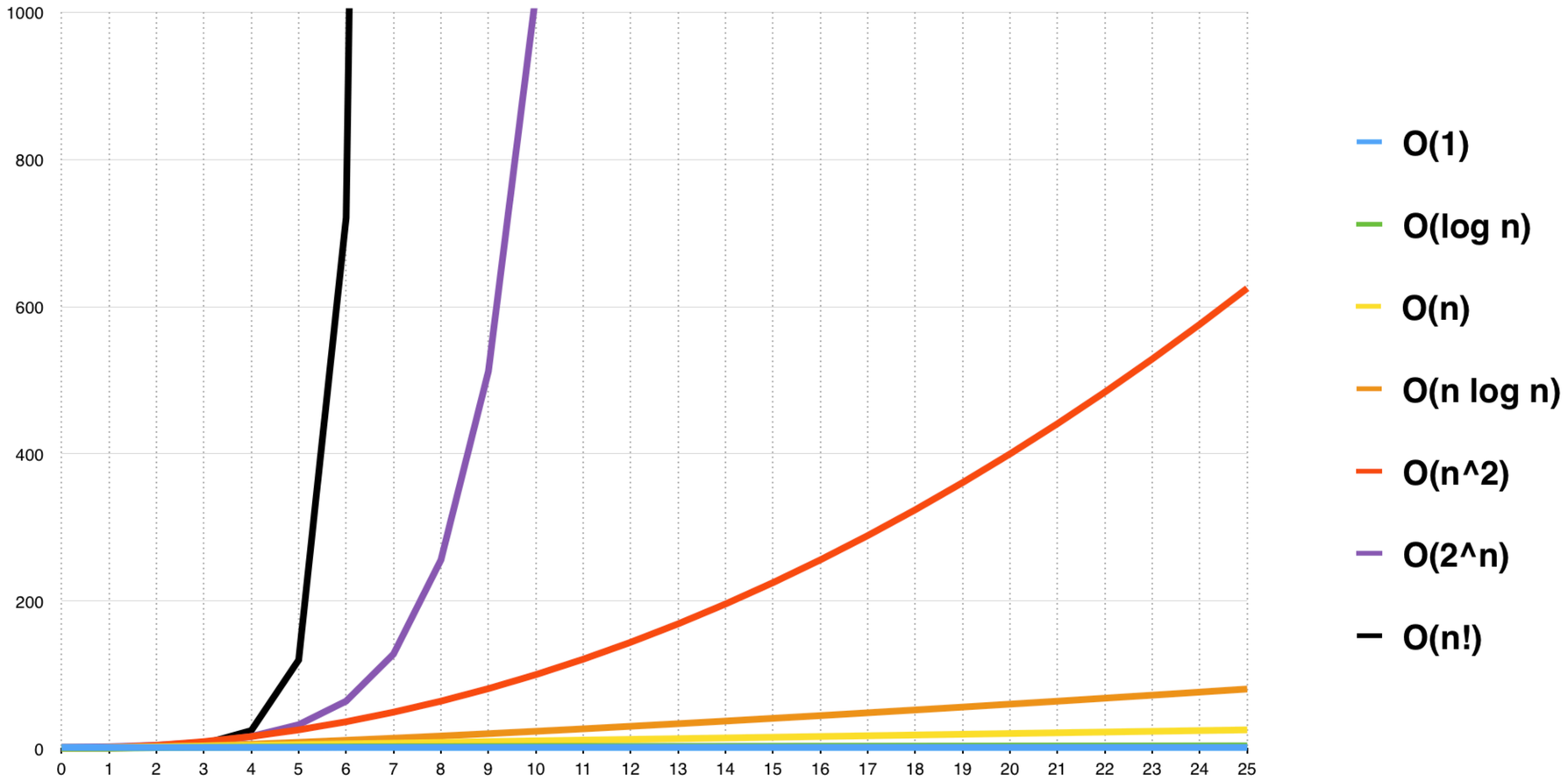
- Правило разработки криптографических систем:
  - Надежность криптосистемы не должна быть основана на ее секретности
  - Система должна оставаться надежной, даже если все ее компоненты, кроме ключа, стали известны атакующему
- Иными словами, «враг знает систему»
- Антипринцип: «безопасность через неясность»

Содержание

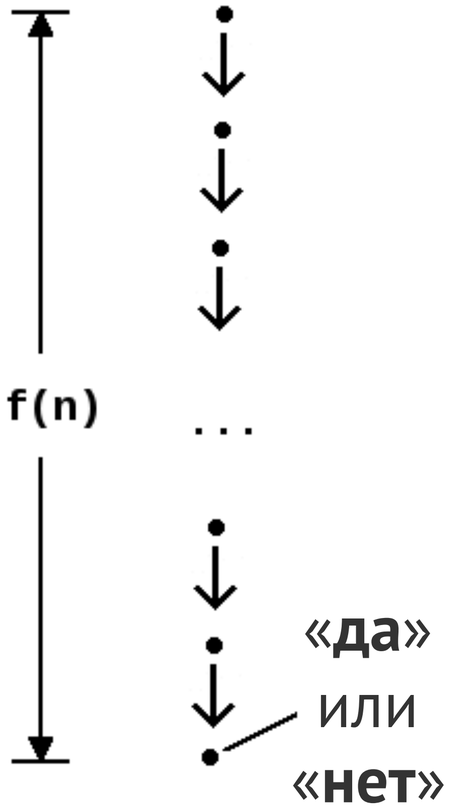
Проблема разрешимости

- Задача со входными данными, требующая ответа «да» или «нет»
- $f\colon X \to \{0, 1\}$
- Для любого входа $x \in X$ мы знаем размер входных данных $n = \| x \|$
- Машина Тьюринга — абстракция вычислителя, «компьютера»
- Нас интересуют алгоритмы вычисления f на машине Тьюринга

Временная сложность алгоритмов



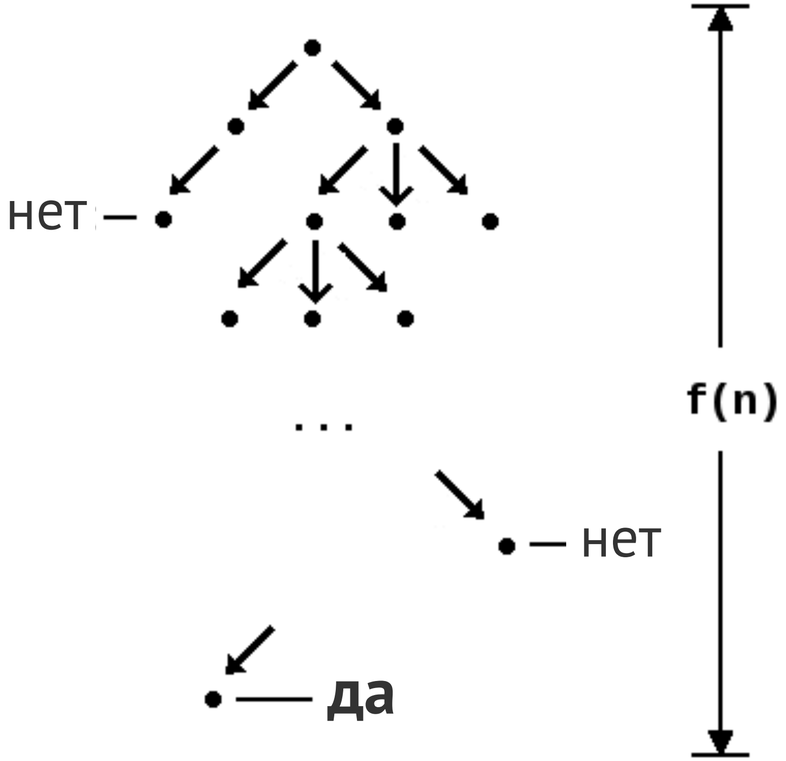
Класс **P**



P — класс проблем разрешимости,
которые решаются за полиномиальное время
на детерминированной машине Тьюринга.

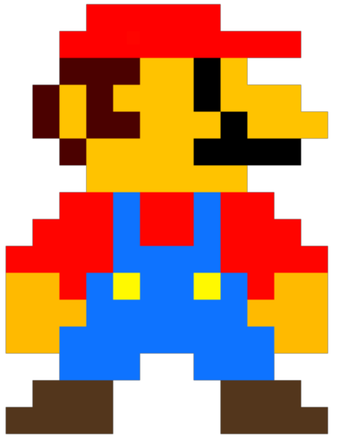
Класс **NP**

- **NP** — класс проблем разрешимости,
  которые решаются за полиномиальное время
  на недетерминированной машине Тьюринга
- Неформально говоря,
  НДМТ — много МТ, работающих параллельно:
  - Если хотя бы одна ответит «да», то ответ «**да**»
  - Ответ «**нет**», если все ответят «нет»



NP-полные задачи

- **NPC** — задачи из класса NP,
  к которым можно (за полиномиальное время)
  свести любую задачу из класса NP.
- Известные NP-полные задачи:
  - SAT — задача проверки выполнимости булевой формулы
  - Задача о рюкзаке
  - Сапер, тетрис, …

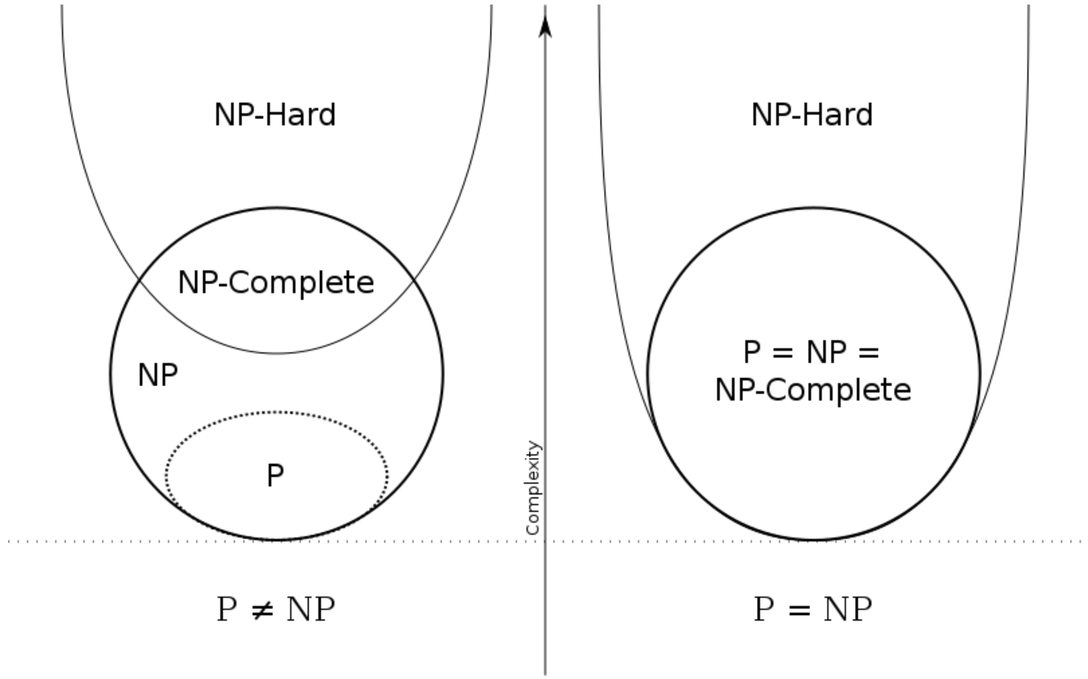


Задача SAT

- Дана булева формула $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$
- Формула представлена в виде имен переменных, скобок, а также операций «и», «или», «не»
- Есть ли такой набор входных значений $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что $f(x) = 1$?
- Пример:
  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\ \&\ (\bar{x_1} \vee x_2)\ \&\ (x_1 \vee \bar{x_3})\ \&\ (\bar{x_2} \vee x_3)\ \&\ (\bar{x_1} \vee \bar{x_2} \vee \bar{x_3})$
- Есть множество эффективных решателей, например, z3 (хотя он умеет намного больше)

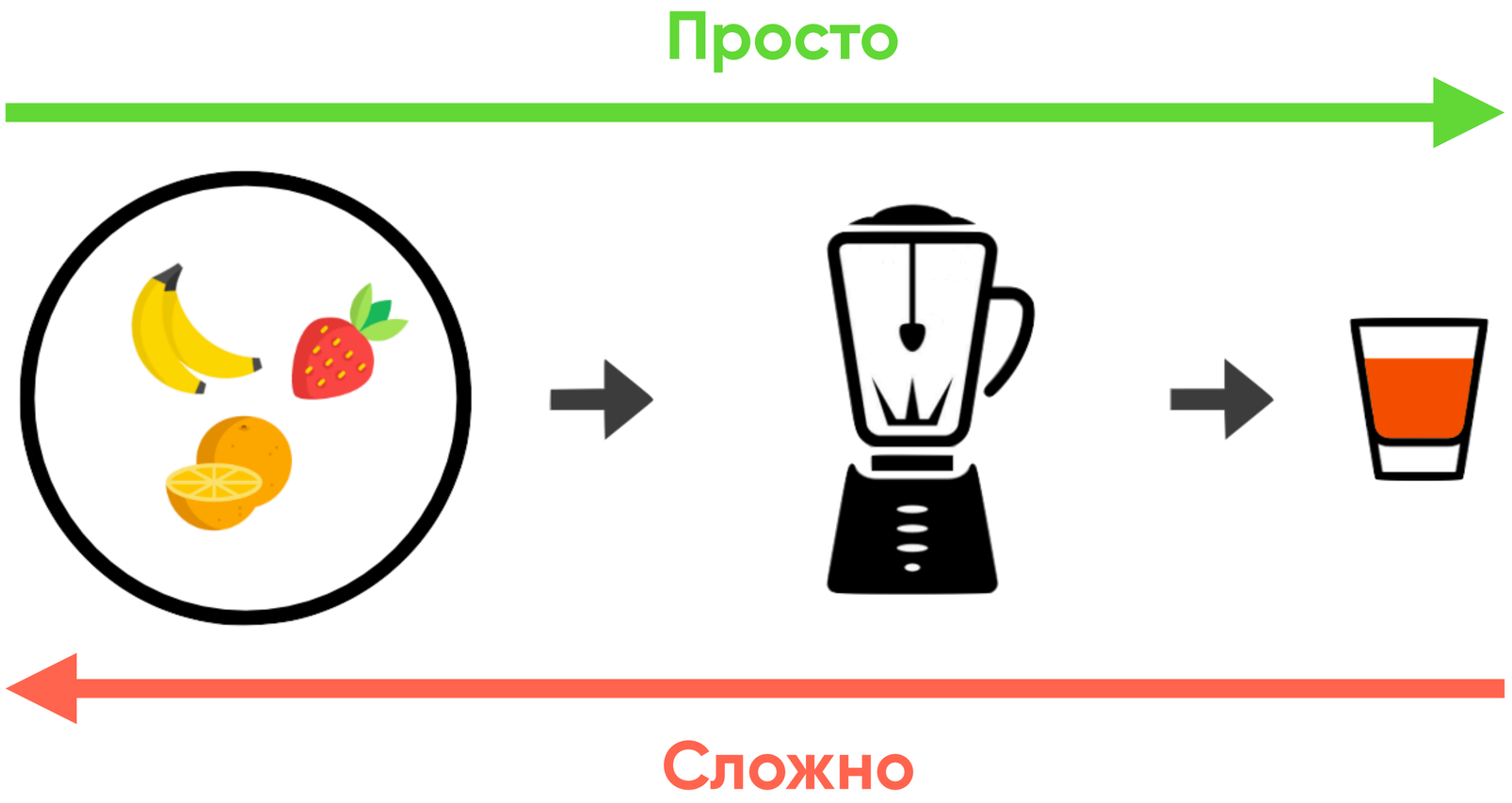
Вопрос равенства классов сложности P и NP

- Очевидно, $P \subseteq NP$
- Открытая задача: $P \neq NP$ или $P = NP$?
- Одна из семи «задач тысячелетия»
- За ответ с доказательством математический институт Клэя предлагает $ 1,000,000



Содержание

Односторонняя функция



Односторонняя функция

- Функция $f\colon X \to Y$, которая «легко» вычисляется для любого входного значения $x \in X$, при этом «трудно» найти $f^{-1}(y)$ для $y \in Y$
- «Легко» и «трудно» понимаются с точки зрения теории сложности вычислений
- Существование таких функций до сих пор не доказано
- Из их существования следует, что P ≠ NP
- Тем не менее, есть хорошие кандидаты

Применение односторонних функций

Существование односторонних функций влечет существование многих других полезных криптографических объектов

Примеры:

- Генератор псевдослучайных чисел
- Имитовставка — код аутентификации
- Цифровая подпись
- Криптографическая хэш-функция
- Доказательство выполнения работы (например, для блокчейна или защиты от спама)

Пример протокола аутентификации

- Алиса генерирует последовательность: $m_0, m_1 = f(m_0), \ldots, m_n = f(m_{n-1})$
- Алиса передает m_n Бобу — защищенный канал или личная встреча
- Когда Алисе необходимо подтвердить свою личность,
  она передает Бобу по открытому каналу m_{n-1}
- Боб проверяет: $f(m_{n-1}) = m_n$?
- Перехват сообщений в открытом канале на i-ом этапе ничего не дает злоумышленнику Еве, так как она не сможет узнать значения m_{i-1}

Односторонняя функция с потайным входом

- Односторонняя функция $f\colon K \times X \to Y$
- Однако, если знаем часть $k \in K$, то можем эффективно обратить функцию.
- Это свойство называется «потайным входом» или «лазейкой»
- Такие функции используются, например, для шифрования

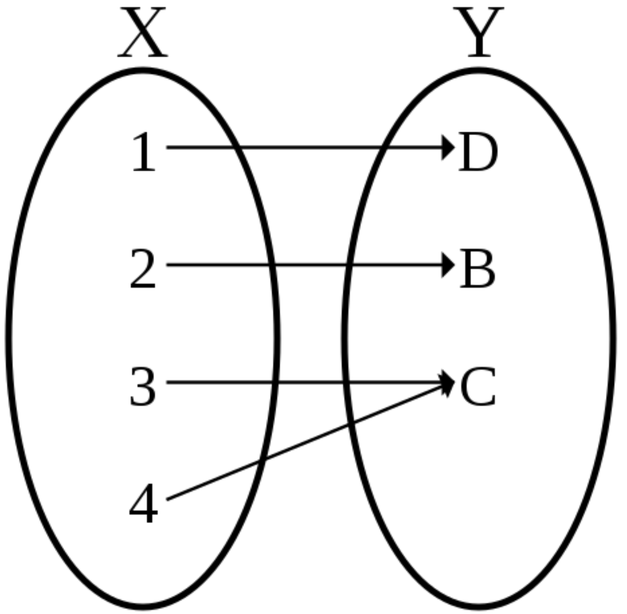
Кандидаты в односторонние функции

- Умножение и факторизация
  Используется, например, в RSA
- Возведение в квадрат и извлечение квадратного корня по модулю
  Например, криптосистема Рабина
- Дискретное экспоненцирование и логарифмирование
  Например, протокол Диффи-Хеллмана
- Семейство криптографических хэш-функций
  Например, SHA-256 и прочие

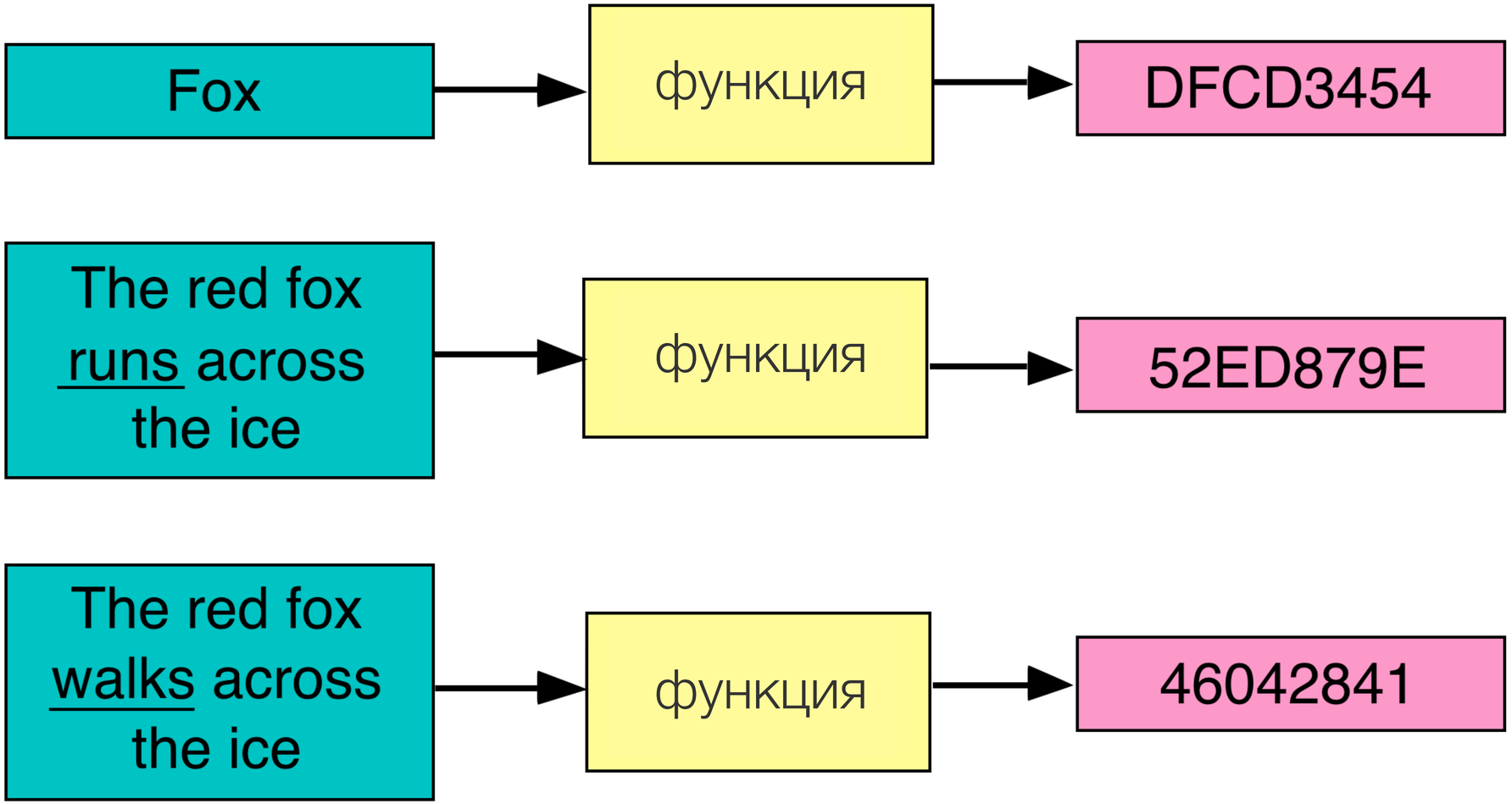
Содержание

Хэш-функции и коллизии

- Хэш-функция $h\colon \{0,1\}^* \to \{0,1\}^m$ – функция, преобразующая сообщение произвольной длины в последовательность фиксированной длины
- Коллизия для хэш-функции:
  пара сообщений $m_1 \neq m_2,\ h(m_1) = h(m_2)$



Лавинный эффект



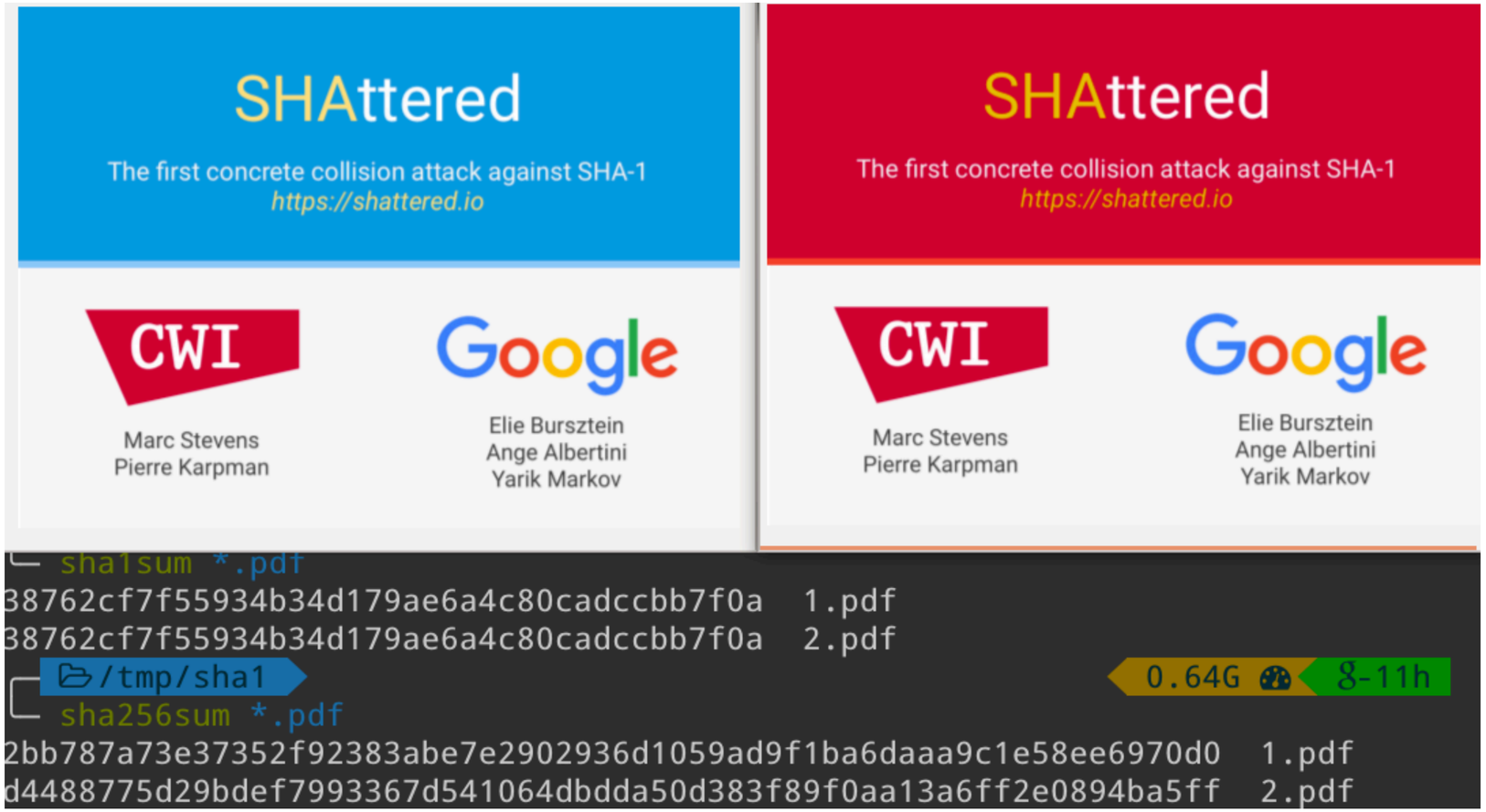
Простой лавинный критерий

- Функция $h\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$ удовлетворяет лавинному критерию, если при изменении одного бита входной последовательности изменяется в среднем половина выходных битов
- Есть более строгие и сложные определения критерия
- Понятие лавинного критерия обычно применяют к криптографическим хэш-функциям и блочным шифрам

Требования к криптографическим хэш-функциям

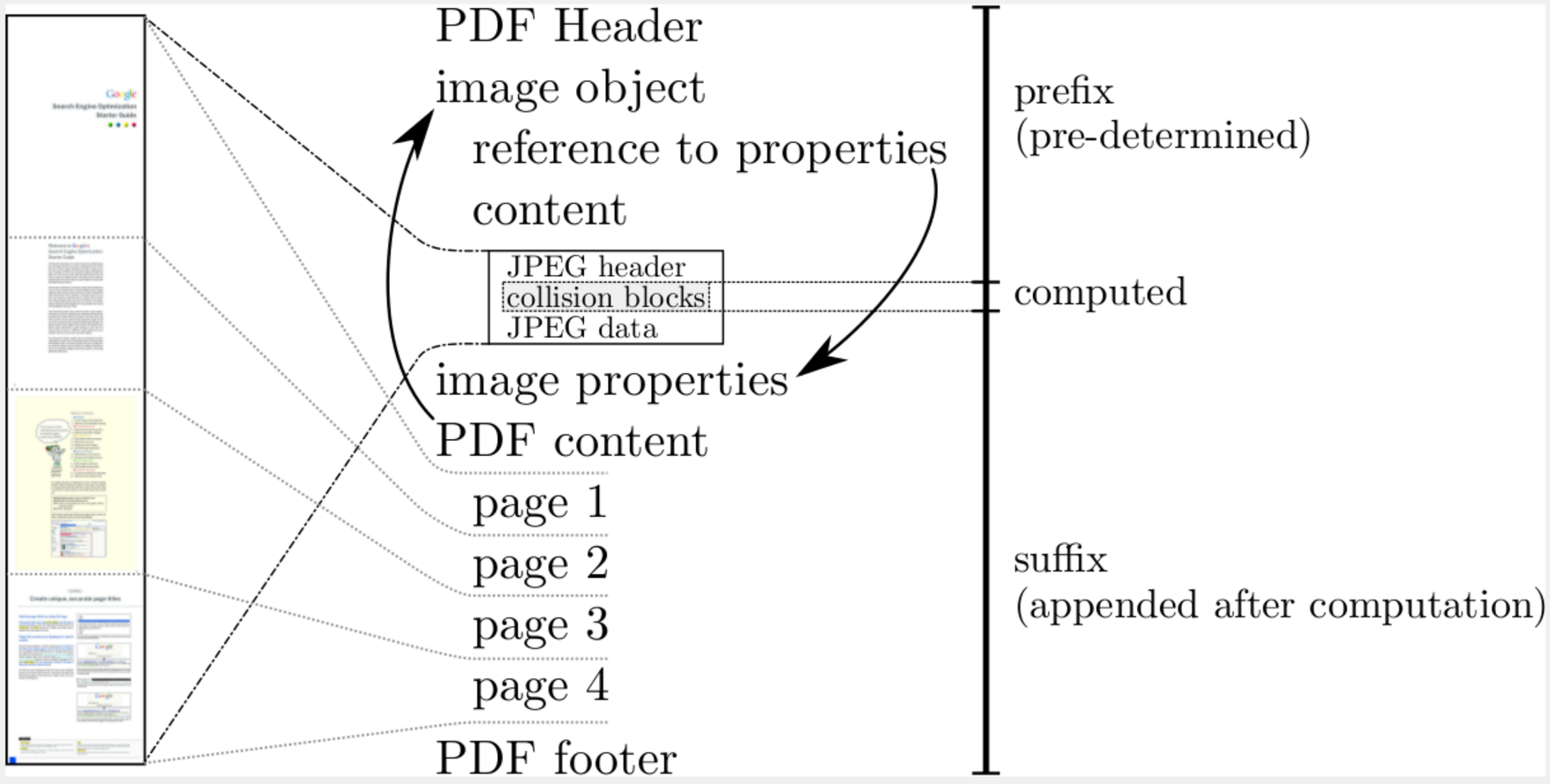
- Стойкость к поиску прообраза I-го рода:
  нельзя эффективно обратить — функция является односторонней
- Стойкость к поиску прообраза II-го рода:
  нельзя эффективно найти другое сообщение с такой же хэш-суммой
  - Стойкость к коллизиям:
    нет эффективного алгоритма, позволяющего находить коллизии
- Лавинный эффект

Коллизии известных хэш-функций



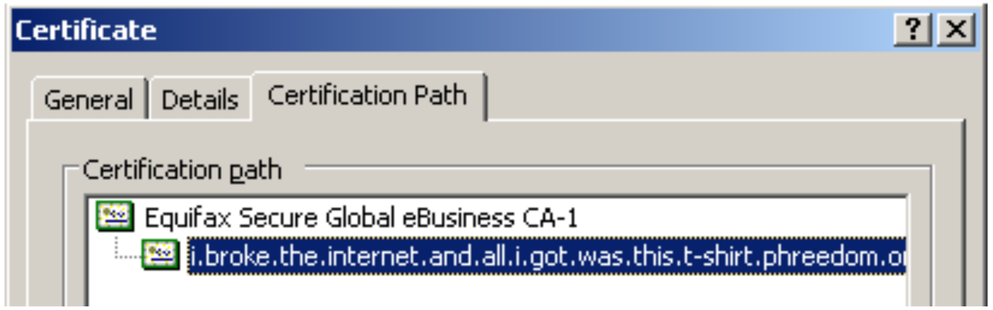
- MD5: ≈2007
- SHA-1: 2017, CWI & Google

Коллизия SHA-1

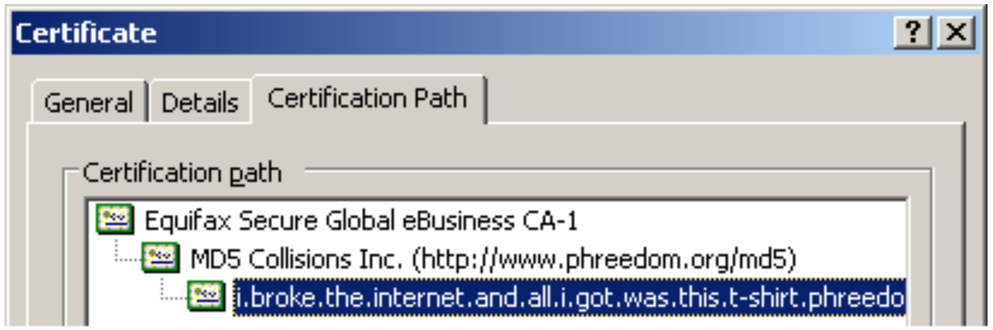


Атака на электронную подпись коллизией

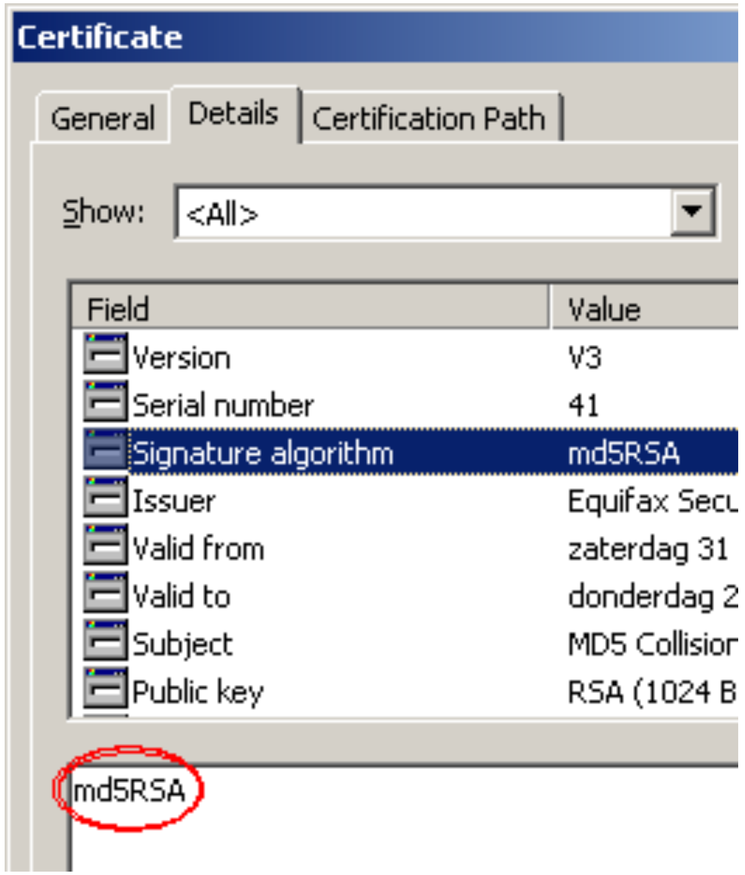
При использовании цифровой подписи обычно подписывают не само сообщение, а его хэш-сумму



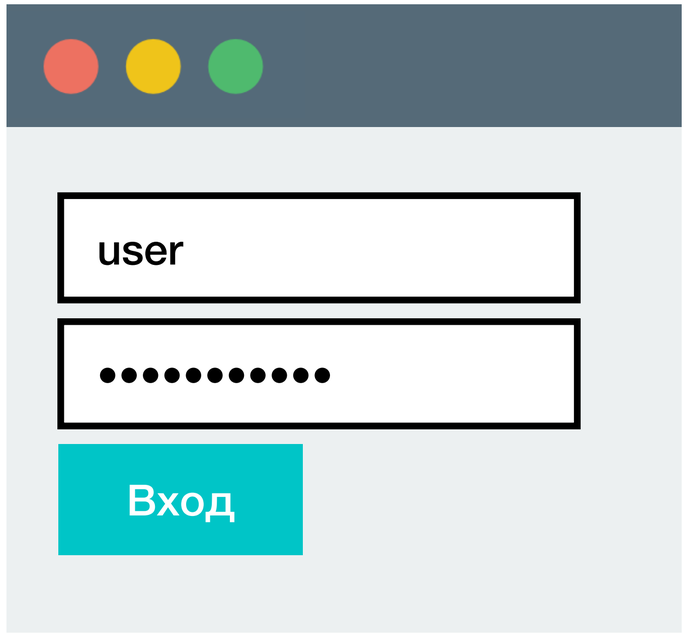
подписано у центра сертификации



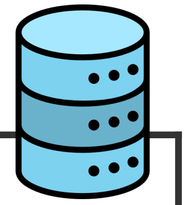
использовали подпись на коллизии



Хранение паролей в открытом виде

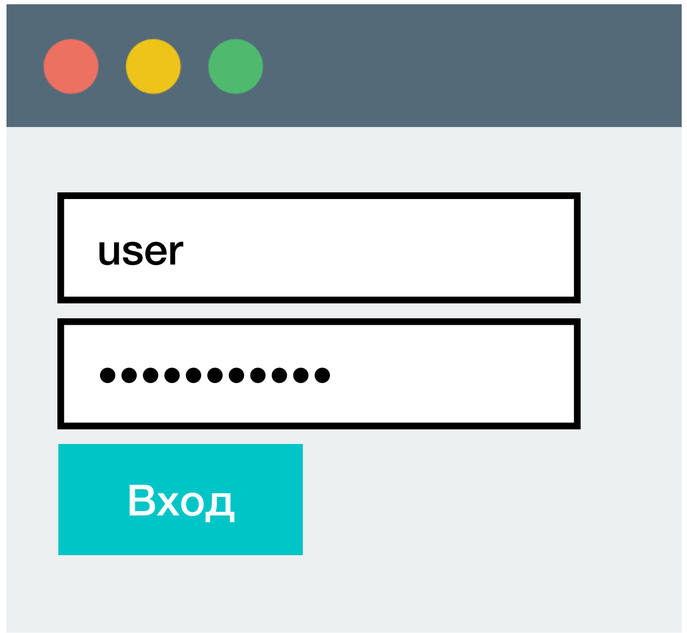


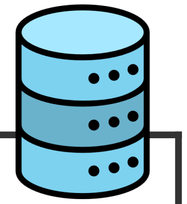
- Злоумышленник получает доступ к БД
- Сразу узнает пароли всех пользователей



username	**password**
admin	qwerty1337
user	password123

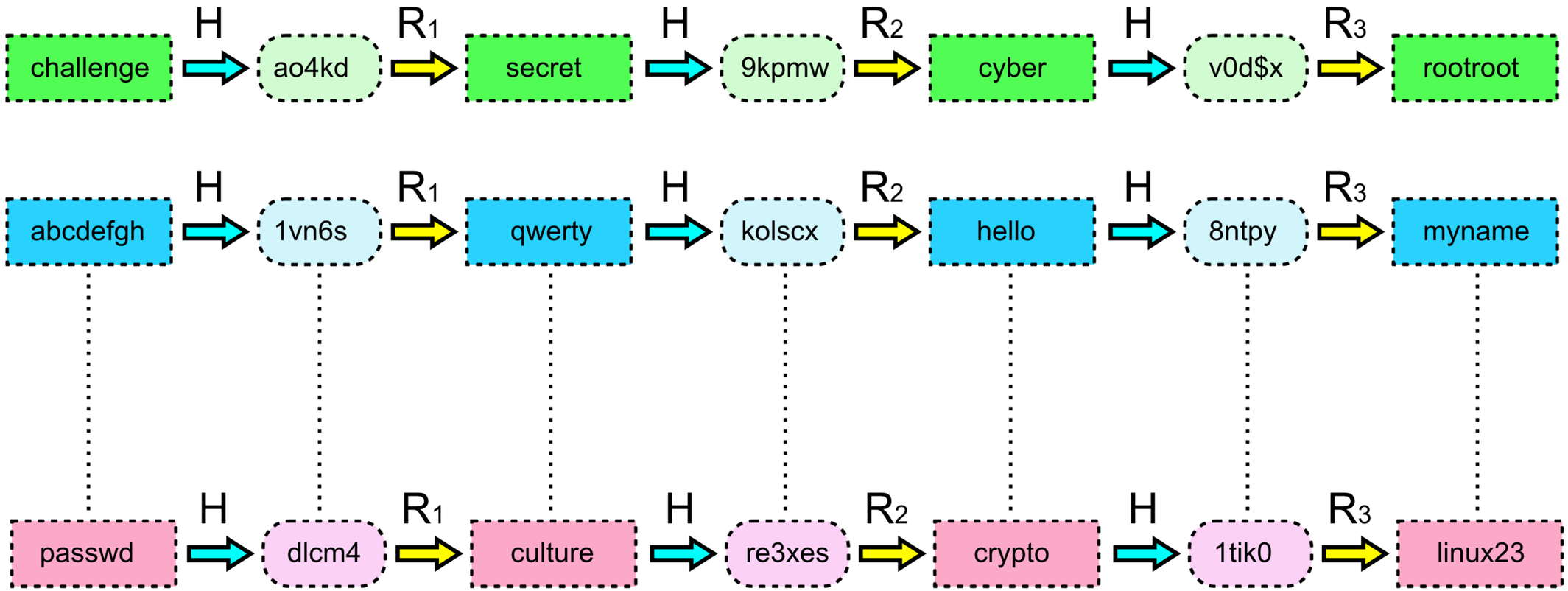
Хэширование паролей





username	password
admin	`$2a$10$0mp0ludyiPhhxyrUOSy/b.muu4WLQOEmpnghwfktHC/5yorciYABO`
user	`$2a$10$WL1hPhzfrBqHdqjXYQTffeEPnRbNC/KkBHsav/iAdWhPvE.vaiVnK`

Радужные таблицы



Радужные таблицы

- Эффективная структура данных, которая позволяет получать соответствие хэш → прообраз хэша
- Идея: берем словарь паролей, хэшируем, сохраняем в радужную таблицу
- Такие таблицы могут занимать много терабайт памяти
- Можно не только составлять их самому, но и:
  - скачать готовые таблицы в интернете
  - воспользоваться веб-сервисами, которые ищут по таблице
- Поиск по ним позволяет атакующему восстановить пароли

Хэширование с солью

- Обычное хэширование: `hash(password)`
- Хэширование с солью: `hash(combine(password, salt))`, где
  - `salt` — некоторое случайное значение для каждого пользователя, которое сохраняется в базу вместе с хэшом пароля
  - `combine` — функция, некоторым образом комбинирующая пароль с солью
- Соление хэшей позволяет усложнить применение радужных таблиц
- Однако, соль не может защитить от перебора каждого отдельного пароля

Есть ли разница?

- `hash(password + ':' + salt)`
- `hash(salt + ‘:' + password)`

Замедление хэширования

- Известные криптографические хэш-функции:
  MD5, SHA-256 и подобные
- Проблема: они быстро вычисляются,
  особенно на специализированном «железе»
- Поэтому используют KDF — функции формирования ключа

Криптографические функции формирования ключа

KDF(cost, key, salt, input) — адаптивная функция формирования ключа:

- cost — сложность вычисления, обычно порядок раундов алгоритма
- key — начальный ключ, из которого надо сформировать другой
- salt — соль
- input — входные данные

Криптографические функции формирования ключа

- Известные KDF: PBKDF2, bcrypt, scrypt, Argon2
- У всех разная степень защиты от атак на CPU, GPU, FPGA, ASIC, …
- Пример bcrypt с 2^5 раундами и солью:

  `$2a$05$3WivJJ2ECsLVE9u.F37DveukbyJP4kxOmDm2QH/KFOubhE7xv.HkO`

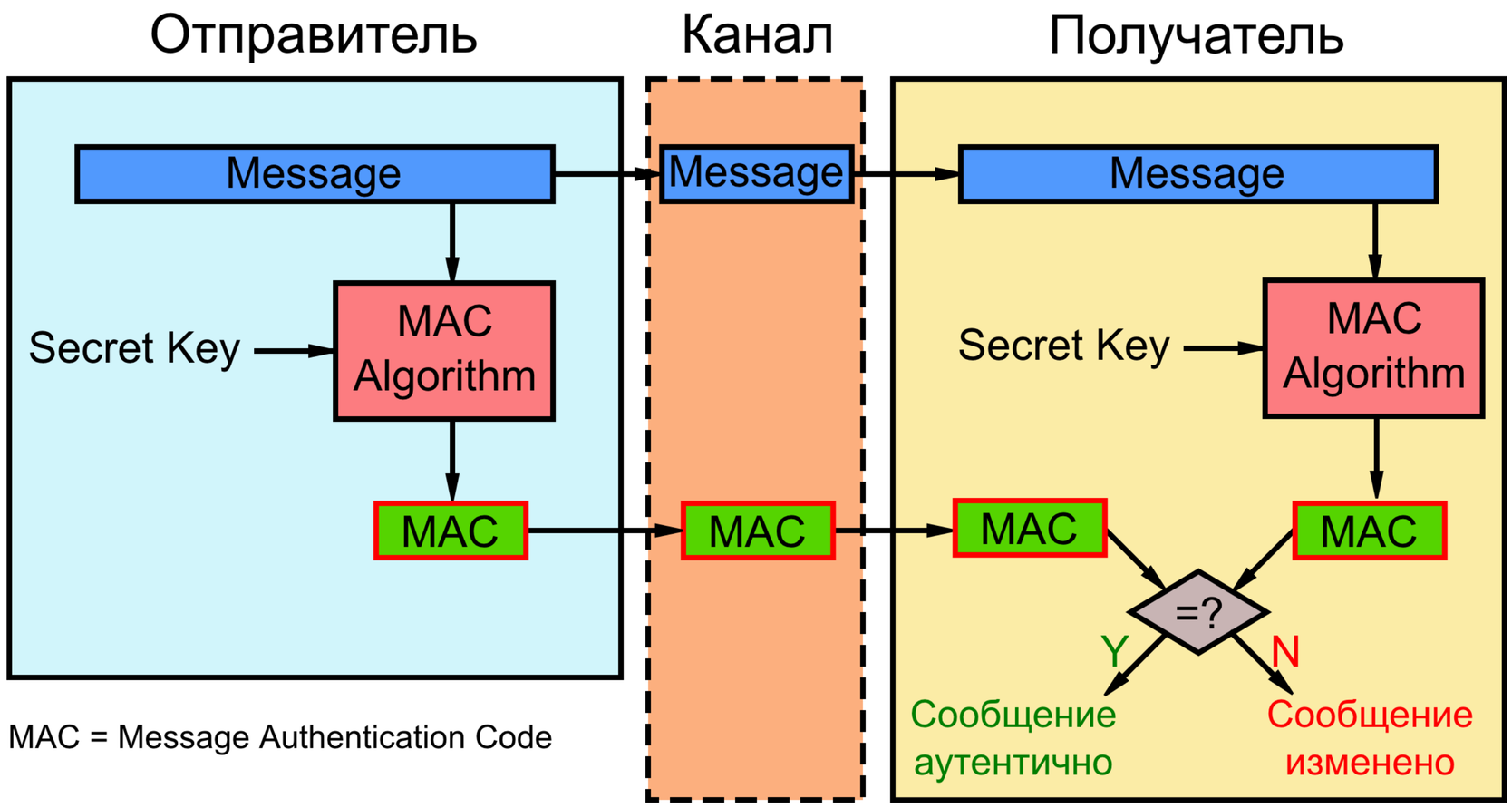
  сложность

Стоимость взлома пароля за 1 год (2010)

KDF	6 letters	8 letters	8 chars	10 chars	40-char text	80-char text
DES CRYPT	$< \$1$	$< \$1$	$< \$1$	$< \$1$	$< \$1$	$< \$1$
MD5	$< \$1$	$< \$1$	$< \$1$	\$1.1k	\$1	\$1.5T
MD5 CRYPT	$< \$1$	$< \$1$	\$130	\$1.1M	\$1.4k	$\$1.5 \times 10^{15}$
PBKDF2 (100 ms)	$< \$1$	$< \$1$	\$18k	\$160M	\$200k	$\$2.2 \times 10^{17}$
bcrypt (95 ms)	$< \$1$	\$4	\$130k	\$1.2B	\$1.5M	\$48B
scrypt (64 ms)	$< \$1$	\$150	\$4.8M	\$43B	\$52M	$\$6 \times 10^{19}$
PBKDF2 (5.0 s)	$< \$1$	\$29	\$920k	\$8.3B	\$10M	$\$11 \times 10^{18}$
bcrypt (3.0 s)	$< \$1$	\$130	\$4.3M	\$39B	\$47M	\$1.5T
scrypt (3.8 s)	\$900	\$610k	\$19B	\$175T	\$210B	$\$2.3 \times 10^{23}$

Содержание

Имитовставка – код аутентификации сообщения



Свойство целостности и подлинности

- Имитовставка не заменяет собой электронную подпись!
- В чем отличие?

Свойство целостности и конфиденциальности

- Могут возникнуть следующие вопросы:
  - Почему бы просто не зашифровать сообщение,
    а потом расшифровать?
  - Чем отличается шифрование от проверки целостности?
  - Что будет, если разработчик криптосистемы не понимает разницы?
- Кстати, иногда необходимо шифровать вместе с обеспечением целостности (см., например, тег в AES-GCM)

Пример уязвимости при отсутствии контроля целостности

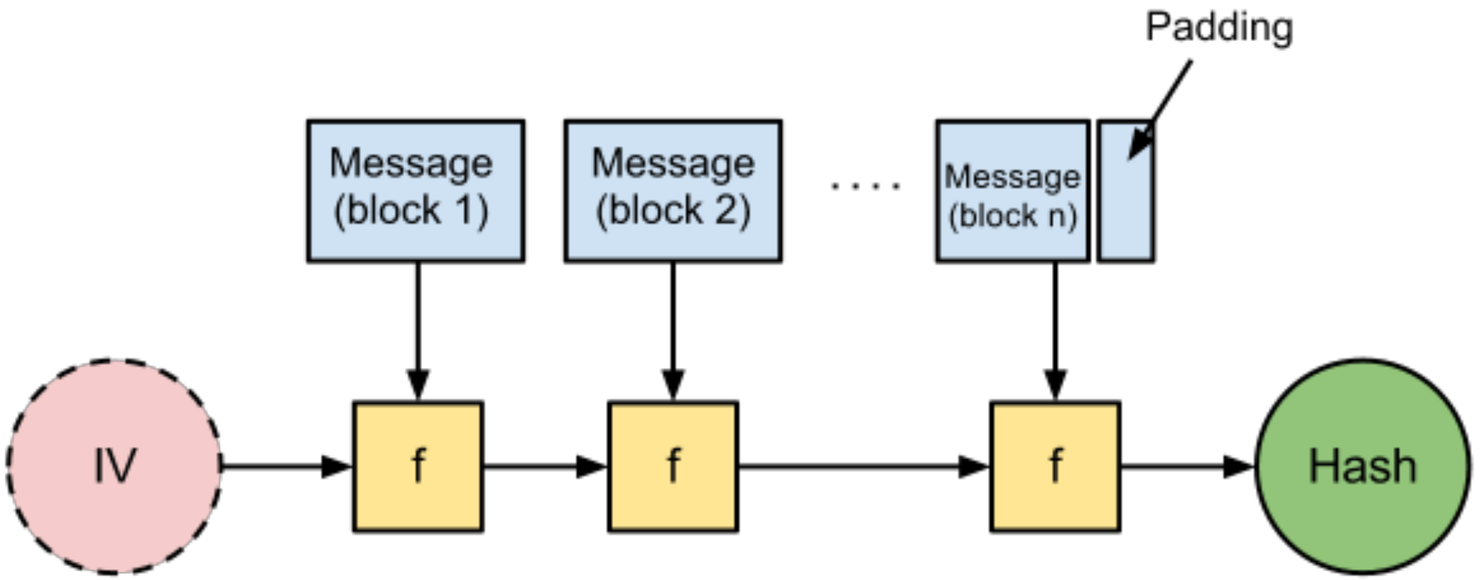
```
def user_token(id):
    return encrypt(key, 'u:{}'.format(id))

def admin_token(id):
    return encrypt(key, 'a:{}'.format(id))

def is_admin(token):
    return 'a:' in decrypt(key, token)
```

атакуется за ≈ $(256^2 / 2)$ запросов

Простой MAC на основе хэш-функции

- $\mathrm{SimpleMAC}_K(M) = \mathrm{H}(K \,\|\, M)$
- H — хэш-функция, K — секретный ключ, M — сообщение

Блочное устройство хэш-функций



Атака удлинением сообщения на подпись $\mathrm{H}(K \parallel M)$

- Запрос:
  `user_id=1&count=5&item=nuggets`
- Есть легитимная подпись:
  `6d5f807e23db210bc254a28be2d6759a0f5f5d99`
- Угадав длину, атакующий формирует новый запрос:
  `user_id=1&count=5&item=nuggets\x80\x00\x00…`
  `\x00\x02\x28&item=wings`
- Новая подпись получается удлинением сообщения

HMAC — код аутентификации на основе хэш-функций

- $\mathrm{HMAC}_K(M) = \mathrm{H}\Big((K \oplus opad) \parallel \mathrm{H}\big((K \oplus ipad) \parallel M \big) \Big)$
- H — хэш-функция, K — секретный ключ, M — сообщение, $opad = (\texttt{0x5c}, \texttt{0x5c}, \ldots, \texttt{0x5c})$, $ipad = (\texttt{0x36}, \texttt{0x36}, \ldots, \texttt{0x36})$
- Доказано, что вероятность успешной атаки на HMAC эквивалентна вероятности атаки на используемую хэш-функцию

Содержание

Перестановочный шифр «Скитала»

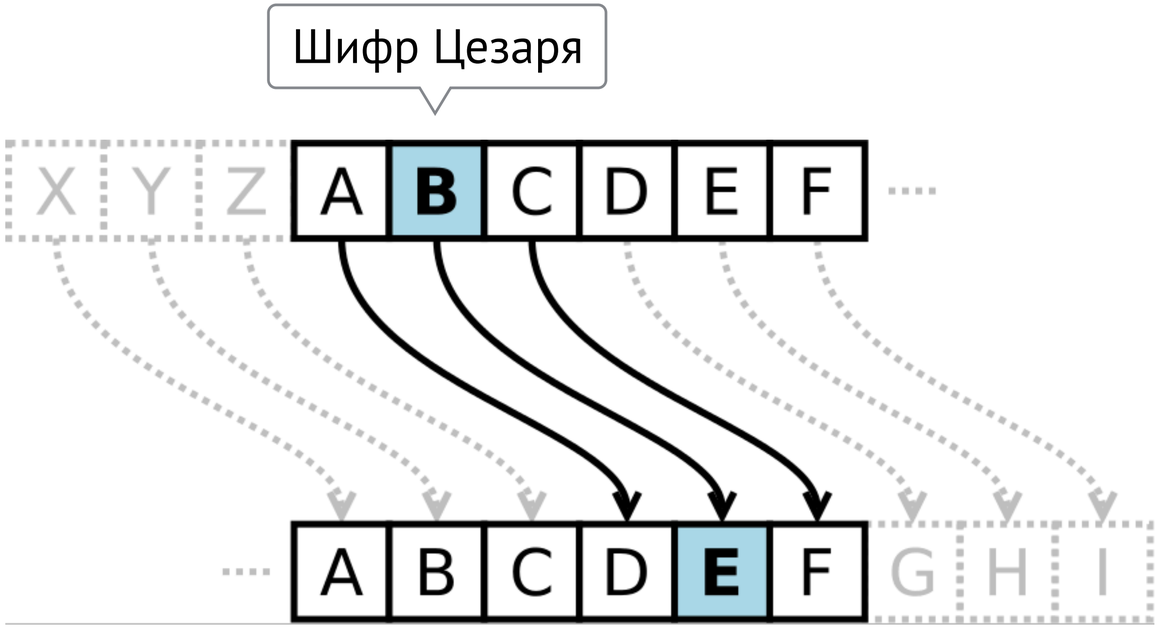
III век до н.э.

«Энигма»

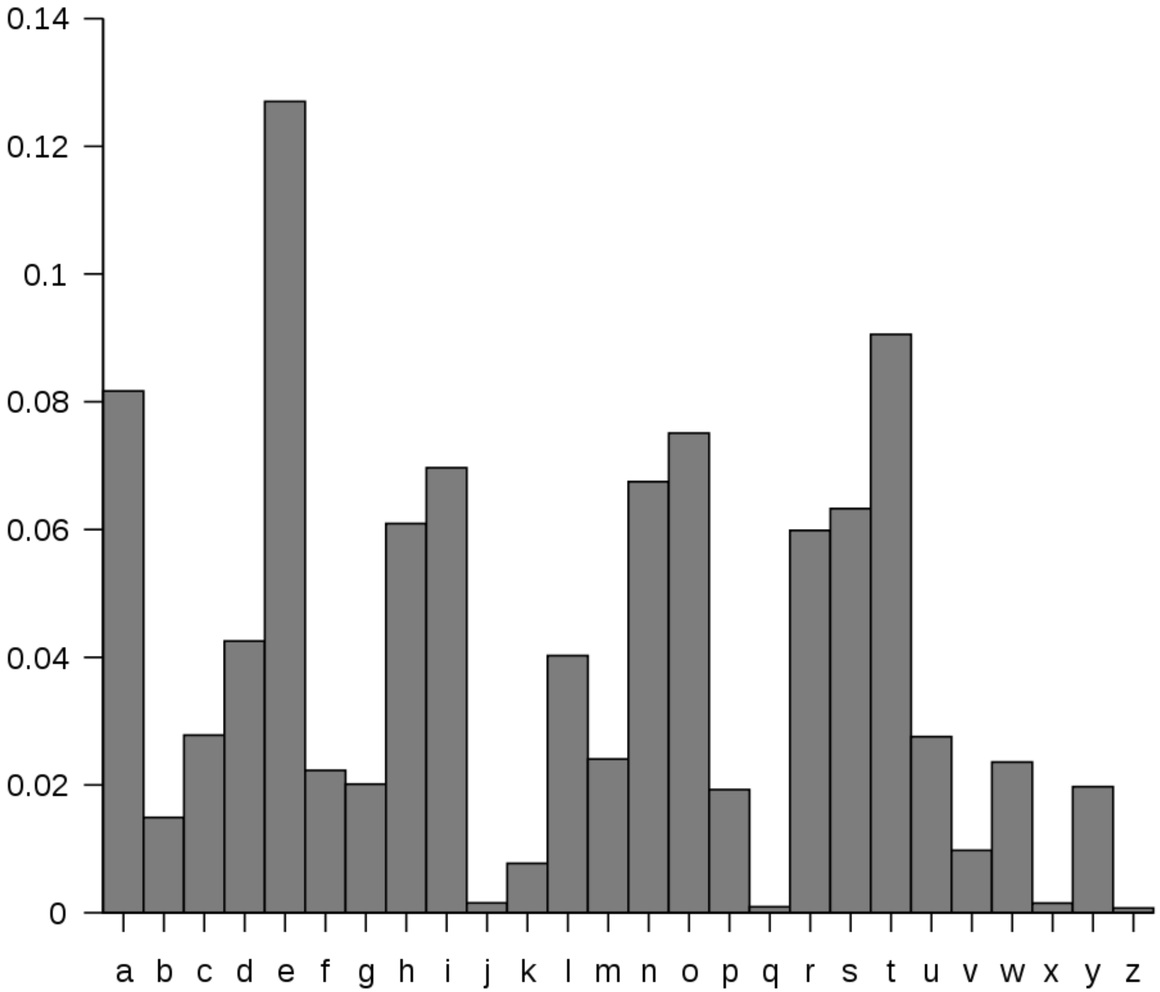
WW II

Простые методы шифрования

- Шифры подстановки
  - Шифр простой замены
    - Цезаря, табличный
  - Прочие
- Шифры перестановки



Частотный криптоанализ

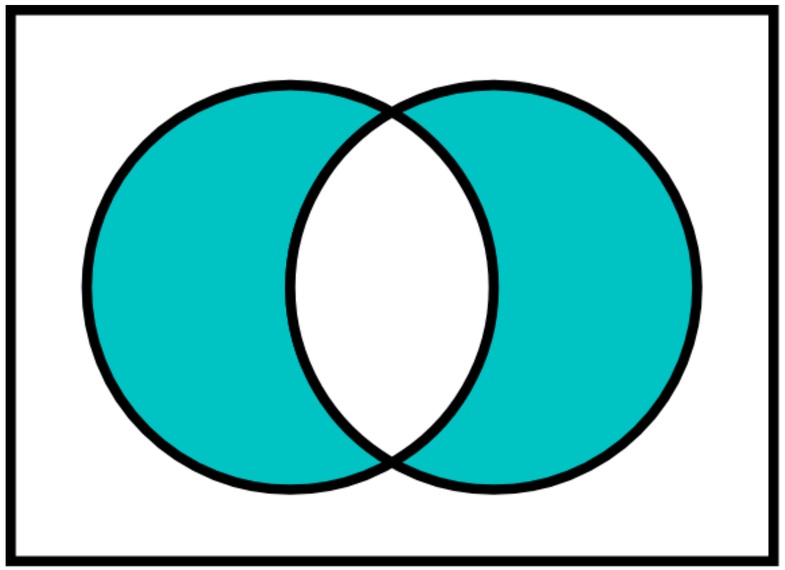


- Атака на простые шифры
- Можно рассмотреть распределение вероятностей:
  - символов алфавита
  - n-грамм, слов

Сложение по модулю 2

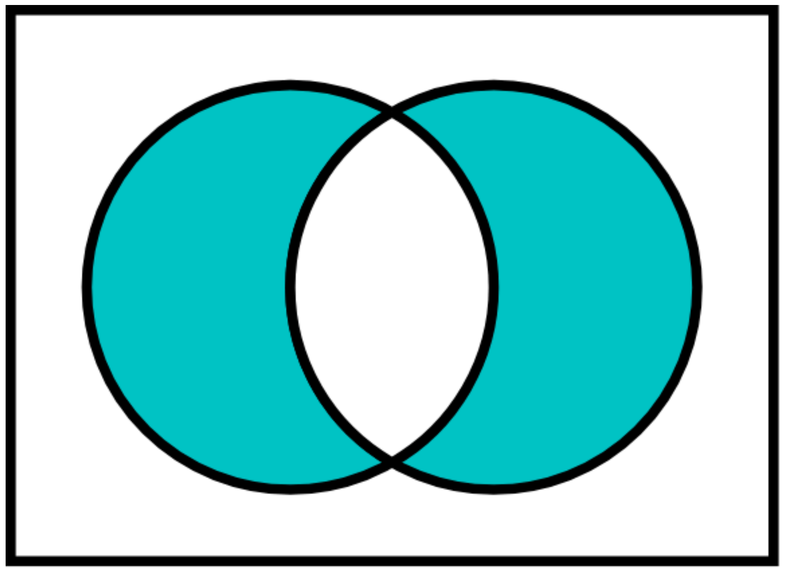
- Оно же «исключающее или», «XOR»
- $\oplus : \{0,1\} \times \{0,1\} \to \{0,1\}$
-

x	y	$x \oplus y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0



Свойства сложения по модулю 2

- Ассоциативность:
  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
- Коммутативность:
  $a \oplus b = b \oplus a$
- Нильпотентность:
  $a \oplus a = 0$
- Получение равенства и отрицания:
  $a \oplus 0 = a$
  $a \oplus 1 = \bar{a}$



Побитовое сложение по модулю 2

$$73 \oplus 87 = 0b1001001 \oplus 0b1010111$$

$$\begin{array}{rccccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ = & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus & \oplus \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ = & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$= 0b0011110$$

$$= 30$$

Шифр Вернама

- $C = P \oplus K \Leftrightarrow P = C \oplus K$
- P — сообщение, C — шифртекст, K — ключ
- Ключ должен быть совершенно случайным и равномерно распределенным:

$$\mathbb{P}(K = k_1 k_2 \ldots k_n) = \frac{1}{2^n}$$

Шифр Вернама

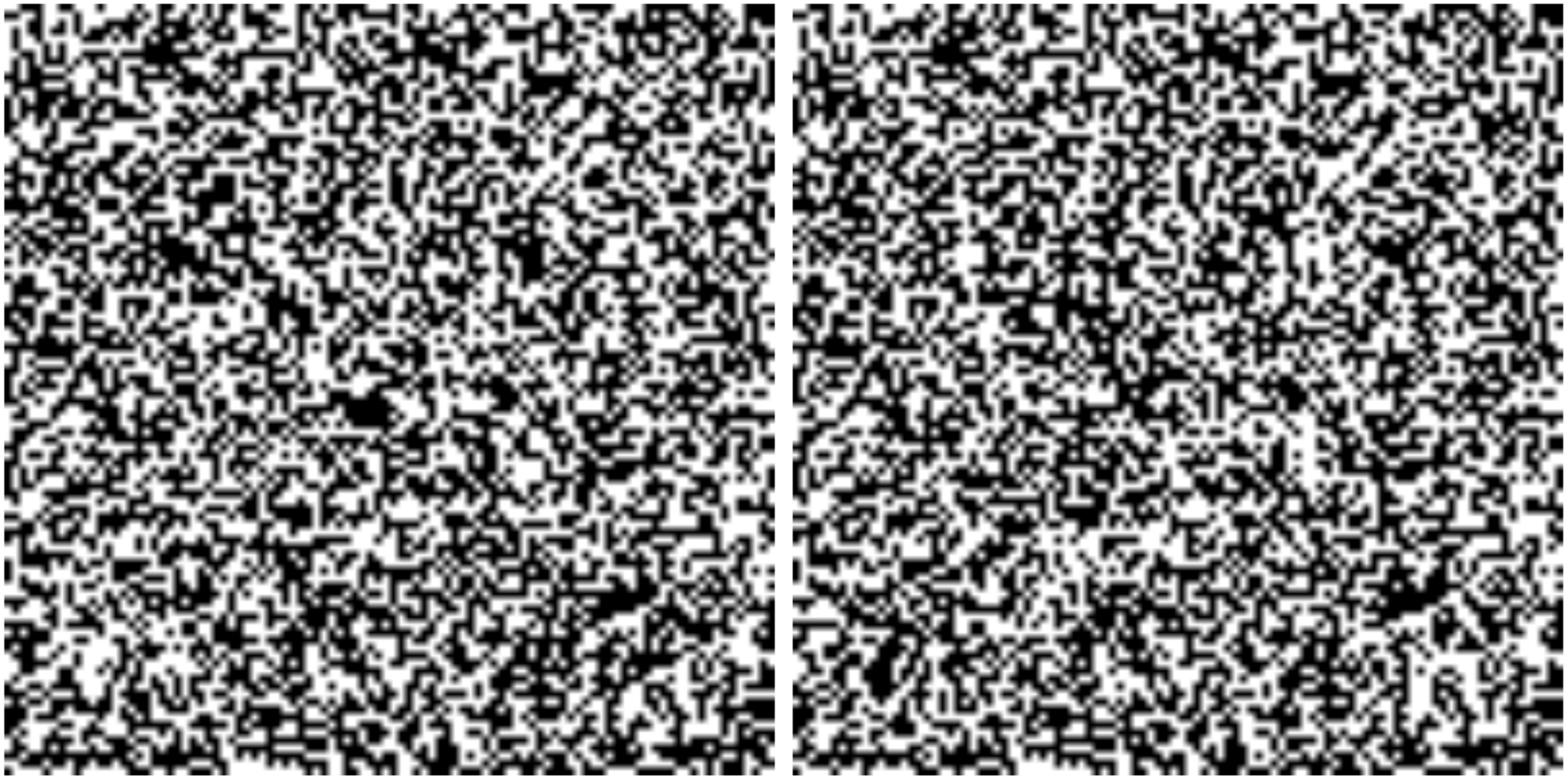
- Симметричный потоковый шифр
- Абсолютно криптостойкий — нельзя придумать шифр лучше
- Однако, довольно часто неприменимый на практике:
  - Для генерации ключа нужен генератор истинно случайных чисел
  - Ключ должен иметь такую же длину, как и сообщение
  - Ключ должен использоваться только один раз,
    после чего уничтожаться

Атаки на шифр Вернама

- Использование не истинно случайно равномерно распределенных ключей
  - Использование повторяющегося укороченного ключа:
    $K = K'K'\ldots K'$ — «XOR-шифр»
    Атаки: частотный анализ, на основе открытых текстов.
- Переиспользование ключа:
  $K_1 = K_2$

Переиспользование ключа

Переиспользование ключа



Переиспользование ключа

- $C_1 = P_1 \oplus K_1$
- $C_2 = P_2 \oplus K_2$
- $K_1 = K_2 \implies$

$$C_1 \oplus C_2 = (P_1 \oplus P_2) \oplus (K_1 \oplus K_2)$$
$$= P_1 \oplus P_2$$

Виды шифрования

- Симметричное — один общий ключ для зашифрования и расшифрования
  - Поточное шифрование
  - Блочное шифрование
    - На основе сетей Фейстеля
    - На основе SP-сетей
    - Прочие
- Асимметричное — различные ключи: как правило, открытый и закрытый

Про поточные шифры

Это случайная последовательность?

01111011001101110001

Про поточные шифры

А это?

0000000000000000000

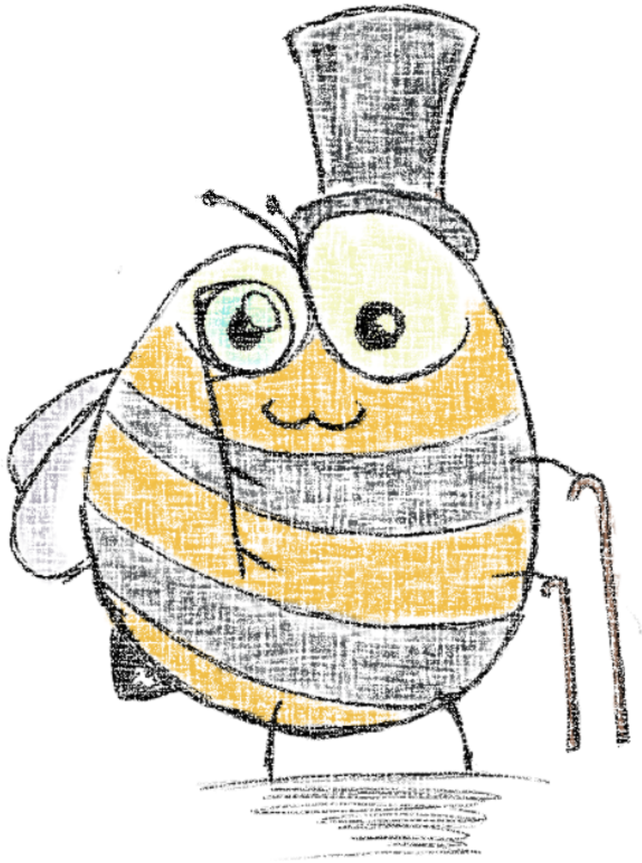
Про поточные шифры

А это?

0101010101010101010101

Шифрование

Подробнее про симметричное и ассиметричное шифрование —
в последующих лекциях по криптографии



Контакты

Хашаев Артур Акрамович

arthur@khashaev.ru · khashaev.ru · telegram: inviz

МГУ им. М.В. Ломоносова
Лаборатория интеллектуальных систем кибербезопасности